

STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

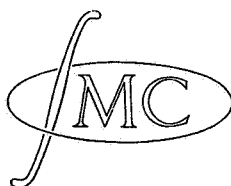
AFDELING ZUIVERE WISKUNDE

WN 9

Over het verband tussen verdelingsgraad, dichtheid en gewicht
van een compacte totaalgeordende topologische ruimte

door

M.A. Maurice



november 1963

Over het verband tussen verdelingsgraad, dichtheid en gewicht van een ctgtr. ^{†)}

§1. Onder de dichtheid van een topologische ruimte X verstaan we
 $d(X) = \min \{ \aleph \mid \exists N \subset X: \overline{N} = X, |N| = \aleph \}.$

Onder het gewicht van een topologische ruimte X verstaan we
 $w(X) = \min \{ \aleph \mid \exists \text{ basis } B \text{ voor } X: |B| = \aleph \}.$

Lemma 1.1: Als X een T_0 -ruimte is, geldt $|X| \leq 2^w$, $w \leq 2^{|X|}$

Lemma 1.2: Als X een compacte-Hausdorff ruimte is, geldt
 $w \leq |X| \leq 2^w$

Lemma 1.3: Als X een Hausdorff-ruimte is, geldt
 $d \leq |X| \leq 2^{2^d}$

Lemma 1.4: Als X een reguliere ruimte is, geldt
 $d \leq w \leq 2^d$

Voor de (verwijzing naar de) bewijzen van deze lemma's zie men het artikel van J. de Groot:

§2. Hulpstelling 1: Als X een ctgtr is, en $\{x_i\}_{i < \omega_\aleph}$ is een stijgende rij of een dalende rij van het type $\omega_\aleph$ in X , dan is $d(X) \geq \aleph$.

Bewijs: $\{(x_{i+2n}, x_{i+2n+2})\}_{i < \omega_\aleph, n < \omega}$ is een disjuncte verzameling niet-lege, open intervallen met kardinaalgetal $\aleph$.

*Lemma 2.1: Als X een ctgtr is, geldt
 $d \leq w \leq |X| \leq 2^d \leq 2^w$

Bewijs: (i) als $w = |X|$, dan volgt uit $d \leq w \leq 2^d$, dat ook $d \leq |X| \leq 2^d$

(ii) als $w < |X|$, dan bestaat in X een (stijgende of dalende) rij van het type ω_w (st. I, 4, 3, 2); dus is $d \geq w$, dus $d = w$.
 Dan volgt uit $w \leq |X| \leq 2^w$, dat ook $d \leq |X| \leq 2^d$.

†) Dit is een vervolg op WN 7 en WN 6. Een verwijzing naar st. I, 3, 2, 1 (resp. st. II, 3, 2, 1) is een verwijzing naar WN 6, st. 3, 2, 1 (resp. WN 7 st. 3, 2, 1) etc.

Hulpstelling 2: Als N dicht is in de ctgtr X , dan geldt voor elke $\mathcal{V}$ -rij V voor X :

$$\mathcal{V} \leq \sup_{x \in N} \mu_x + 1$$

Bewijs:

Zij $\eta = \sup_{x \in N} \mu_x$.

Indien nu $|X_p^{(\eta)}| \geq 3$ voor zekere $p \in Z_\eta$,

dan geldt voor een c , met $l(X_p^{(\eta)}) < c < r(X_p^{(\eta)})$, dat $c \notin D_\eta$; daar echter $N \subset D_\eta = \overline{D}_\eta$, terwijl $\overline{N} = X$, ontstaat een tegenspraak.

Dus: $\forall p \in Z_\eta : |X_p^{(\eta)}| \leq 2$,

en derhalve $\mathcal{V} \leq \eta + 1$.

Opmerking: Het kan voorkomen, dat $\mathcal{V} = \eta + 1$;

voorbeeld: zij $Z_{\omega+1}^+$ de ctgtr, die uit $Z_{\omega+1}$ ontstaat door de punten $(a,0)$ en $(a,1)$ te identificeren, als a rationaal is; als nu V de reguliere $\mathcal{V}$ -rij voor $Z_{\omega+1}^+$ is, dan geldt $\mathcal{V}(V) = \omega + 1$, $\eta(V) = \omega$.

*Lemma 2.2: Als X een ctgtr is, en V is een $\mathcal{V}$ -rij voor X , dan is $|\mathcal{V}| \leq d$.

Bewijs:

1. Als in X een (stijgende of dalende) rij van het type $\omega_{|\mathcal{V}|}$ voorkomt, volgt het gestelde onmiddellijk uit hulpstelling 1. (dit is dus o.a. het geval als $\mathcal{V} > \omega_{|\mathcal{V}|}$, en als - in het geval dat $\mathcal{V} = \omega_{|\mathcal{V}|}$ - een $x \in X$ bestaat, met $\mu_x = \mathcal{V}$; zie lemma I,4,3,2).
2. In het andere geval geldt dus

$$(i) \quad \mathcal{V} = \omega_{|\mathcal{V}|}$$

$$(ii) \quad \forall x \in X: \mu_x < \mathcal{V}.$$

Als N nu dicht is in X , en $|N| = d$, dan is

$$\forall x \in N: \mu_x < \mathcal{V} = \omega_{|\mathcal{V}|},$$

$$\forall x \in N: |\mu_x| < |\mathcal{V}| \leq |X|;$$

daar $d \leq |X| \leq 2^d$ volgt

$$\forall x \in N: |\mu_x| \leq d.$$

Op grond van hulpstelling 2 is dan

$$|\mathcal{V}| \leq \left| \sup_{x \in N} \mu_x + 1 \right| \leq |N| \cdot d = d^2 = d.$$

*Stelling 2.1: Als X een ctgtr is, met dichtheid d en gewicht w , en $V = \{v_\gamma\}_\gamma$ is een $\mathcal{V}$ -rij voor X met $\mathcal{V}(V) = \mathcal{V}$, dan geldt:

$$|\mathcal{V}| \leq d \leq w \leq |X| \leq 2^{|\mathcal{V}|} \leq 2^d \leq 2^w.$$

Bovendien gelden in de relatie

$$|\mathcal{V}| \leq d \leq w \leq |X|$$

ten minste twee der gelijktokens.

Bewijs:

Het eerste deel der bewering volgt onmiddellijk uit het voorgaande. Indien voorts in de relatie

$$|\mathcal{V}| \leq d \leq w \leq |X|$$

ten minste twee der ongelijktokens gelden, dan volgt

$$|X| \geq 2^{2^{|\mathcal{V}|}};$$

en dit is in tegenspraak met $|X| \leq 2^{|\mathcal{V}|}$.

Gevolg: In het bijzonder is

$$|\theta| \leq d \leq w \leq |X| \leq 2^{|\theta|} \leq 2^d \leq 2^w,$$

terwijl in

$$|\theta| \leq d \leq w \leq |X|$$

ten minste twee der gelijktokens van kracht zijn.

- Voorbeelden:
- (i) $X = Z_{\omega+2} : |\theta| < d$
 - (ii) $X = Z_{\omega+1} : d < w$
 - (iii) $X = Z_{\omega} : w < |X|$
 - (iv) $X = H : |\theta| = d = w = |X|$

*Lemma 2,3: Als X een ctgtr is, met dichtheid d , gewicht w en verde-
lingsgraad θ , dan geldt:

- a. indien $\theta = \omega_{\aleph}$ of $\theta = \omega_{\aleph} + 1$, dan is $d = \aleph$.
- b. indien $\theta = \omega_{\aleph}$, dan is $w = \aleph$

Bewijs:

a. Zij V een $\mathcal{V}$ -rij voor X , met $\mathcal{V}(V) = \theta$.

Het is duidelijk, dat

$$\bigcup_{\tau < \omega_{\aleph}} D_{\tau} = D_{\omega_{\aleph}} = D_{\omega_{\aleph} + 1} = X ;$$

daar echter

$$\forall \tau < \omega_{\aleph} : |D_{\tau}| \leq 2^{|\tau|} \leq \aleph$$

volgt

$$\left| \bigcup_{\tau < \omega_{\aleph}} D_{\tau} \right| \leq \aleph \cdot \aleph = \aleph.$$

Dus $d \leq \aleph$

Anderzijds volgt uit $|\theta| \leq d$, dat $\aleph \leq d$. Derhalve is $d = \aleph$.

b. Zij V een $\mathcal{V}$ -rij voor X , met $\mathcal{V}(V) = \theta$.

Zij $N = \bigcup_{\tau < \omega_{\aleph}} D_{\tau}$.

Dan geldt dat de verzameling B van alle verzamelingen

$$\{x | a < x < b\} \quad (a, b \in N)$$

een basis is voor de topologie in X ;

immers: kies een open verzameling O ; zonder beperking der alge-
meenheid zij $O = O_{rs} = \{x | r < x < s\}$; kies $y \in O$.

- (i) als y zowel een linkerbuur ' y ' als een rechterbuur ' y ' heeft, dan behoren ' y en ' y ' tot zekere $D_\tau(\tau < \omega_\kappa)$, dus tot N ; dan is

$$y \in O_{yy'} < 0, O_{yy'} \in B.$$

- (ii) als y een linkerbuur ' y ', maar geen rechterbuur heeft, dan ' $y \in N$ ', en bovendien is er, daar $\bar{N} = X$, een $z \in N$ zodanig dat $y < z < s$; dan is

$$y \in O_{yz} < 0, O_{yz} \in B$$

- (iii) het geval dat y geen linkerbuur, maar wel een rechterbuur ' y ' heeft, wordt analoog behandeld.

- (iv) als y noch een linkerbuur, noch een rechterbuur heeft, dan bestaan z_1 en $z_2 \in N$, zodanig dat $r < z_1 < y < z_2 < s$; dan is

$$y \in O_{z_1 z_2} < 0, O_{z_1 z_2} \in B.$$

Nu is:

$$|B| \leq |N|^2 = \kappa^2 = \kappa, \text{ en dus } w \leq \kappa.$$

Anderzijds volgt uit $|\theta| \leq d$ dat $\kappa \leq d$, dus $\kappa \leq w$. Derhalve is $w = \kappa$.

§3. Zij X een ctgtr.

Zij P de verzameling der linker- en rechter-sprongpunten in X ; zij Q de verzameling van die paren $\{p', p''\}$ van sprongpunten, die elkaars buur zijn.

Het is duidelijk, dat $|P| = |Q|$.

*Lemma 3.1: a. Als $|P| = |X|$, dan is $w = |X|$
b. Als $|P| < |X|$, dan is $w = d$.

Bewijs:

a. Zij B een basis voor de topologie in X ; daar elke verzameling

$$\{x | x < p'', p'' \text{ linkersprongpunt}\}$$

open is, en bovendien een grootste element heeft (nl. de linker-
 buur p' van p''), volgt, voor elk rechtersprongpunt p' de
 existentie van een $0 \in B$, waarin p' het grootste element is; der-
 halve is $|B| \geq |P| = |X|$, dus $w = |X|$.

b. Zij N een deelverzameling van X , zodanig dat

$$\overline{N} = X, |N| = d.$$

Dan is de familie B van alle verzamelingen

$$\{x | a < x < b\} \quad (a, b \in P \cup N)$$

een basis voor de topologie van X ;

immers: zij O een open verzameling in X ; zonder beperking der
 algemeenheid zij

$$O = O_{rs} = \{x | r < x < s\};$$

kies $y \in O$.

(i) Als $r, s \in P$, dan $O \in B$

(ii) Als $r \notin P, s \in P$, dan is er een $a \in N$, zodanig dat $r < a < y$;
 en

$$y \in O_{as} \subset O_{rs}, \quad O_{as} \in B$$

(iii) Het geval $r \in P, s \notin P$ wordt analoog behandeld.

(iv) Als $r, s \notin P$, dan zijn er $a, b \in N$, zodanig dat $r < a < y$ en
 $y < b < s$; en

$$y \in O_{ab} \subset O_{rs}, \quad O_{ab} \in B.$$

Daar nu $|P| < |X|$, dus $|P| \leq d$, volgt $|P \cup N| = d$, en dus $|B| \leq d$;
 d.w.z. $w = d$.

Gevolg: Als X samenhangend is, is $w = d$.

*Lemma 3.2: I. Als X een samenhangende ctgtr is, en $\theta = \theta(X)$,
 $d = d(X)$, $w = w(X)$, dan geldt

$$\theta \leq \omega_d$$

II. Als X een nuldimensionale ctgtr is, en $\theta = \theta(X)$,
 $d = d(X)$, $w = w(X)$, dan geldt

- (i) $\theta \leq \omega_d + 1$;
 en als $|P| < |X|$, dan is $\theta \leq \omega_d$
- (ii) $\theta \leq \omega_w$

Bewijs:

We geven het bewijs van het lemma voor het geval dat X nuldimensionaal is.

1. Vooraf merken we het volgende op: Als Y een nuldimensionale ctgtr is, en $p, q, r \in Y$, dan kan men twee opvolgende $\mathcal{V}$ -splittings van Y aangeven, zodanig dat van de punten p, q, r geen twee tot dezelfde $Y_p^{(2)}$ ($p \in Z_2$) behoren.
2. Als α een ordinaalgetal is, dan schrijven we

$$\alpha = v_\alpha + m_\alpha,$$

waarbij v_α een limietgetal (of 0) is, en m_α een geheel getal ≥ 0 .
 Zij dan

$$\bar{\alpha} = v_\alpha + m_\alpha \cdot 2$$

(Voor een limietgetal is dus $\bar{\alpha} = \alpha$).

3. We bewijzen nu eerst, dat $\theta \leq \omega_d + 1$.

Zij $N \subset X$, $\bar{N} = X$, $|N| = d$.

Zij S de verzameling der punten s in X , die zowel een linkerbuur ' s ', als een rechterbuur s' hebben; dan is $S \subset N$.

Zij A de verzameling der paren $\{s, s'\}$ en $\{s', s\}$, en zij $R = N \cup A$.

Dan is ook $|R| = d$.

Zij tenslotte $\{r_i\}_{i < \omega_d}$ een welordering van R .

- a. We tonen aan, dat door transfinitie inductie een $\mathcal{V}$ -rij $V = \{V_\gamma\}_\gamma$
 $\text{--- } V_\gamma = \{X_p^{(\gamma)}\}_{p \in Z_\gamma}$ --- voor X kan worden gedefiniëerd, zodanig
 dat voor alle $\gamma \leq \omega_d$:

$$\forall p \in Z_\gamma : |X_p^{(\gamma)} \cap \bigcup_{i < \gamma} t_i| \leq 1 ; \quad \dots (1)$$

hierin is $t_i = \{r_i\}$ als $r_i \in N$ en $t_i = r_i$ als $r_i \in A$.

Aldus:

- (i) Voor $\alpha=0$ is ook $\alpha=0$; indien dan $V_0=\{X\}$, is aan de bewering (1) — daar $\bigcup t_i = \emptyset$ — zeker voldaan.
- (ii) (ii,1) Zij $V_\gamma^{i<0}$ gedefinieerd voor $\gamma \leq \bar{\delta}_1$ en zij voor al die γ voldaan aan (1).

Zij $\delta = \delta_1 + 1$; dan is $\bar{\delta} = \bar{\delta}_1 + 2$.

Daar $|X_p^{(\bar{\delta}_1)} \cap \bigcup_{i < \delta_1} t_i| \leq 1$, en daar $|t_{\delta_1}| \leq 2$, kan men, op grond van 1., 2 opvolgende $\mathcal{V}$ -splittingsen van $X_p^{(\bar{\delta}_1)}$ definiëren, zodanig, dat

$$\forall q \in Z_2 : |X_{pq}^{(\bar{\delta})} \cap \bigcup_{i < \delta} t_i| \leq 1.$$

(ii.2) Indien $\delta = \bar{\delta}$ een limietgetal is, is voor $p \in Z_\delta$:

$$X_p^{(\delta)} = \bigcap_{\gamma < \delta} X_{p/\gamma}^{(\gamma)}.$$

Als nu voor zekere $p \in Z_\delta$ zou gelden dat $|X_p^{(\delta)} \cap \bigcup_{i < \delta} t_i| \geq 2$, dan bestaan a en b ($a \neq b$), zodanig dat

$$a, b \in X_p^{(\delta)} \cap \bigcup_{i < \delta} t_i;$$

dus ook $a, b \in \bigcup_{i < \gamma+1} t_i$ voor zekere $\gamma < \delta$;

dat wil zeggen

$$a, b \in X_{p/\gamma+1}^{(\gamma+1)} \cap \bigcup_{i < \gamma+1} t_i,$$

dus

$$|X_{p/\gamma+1}^{(\gamma+1)} \cap \bigcup_{i < \gamma+1} t_i| \geq 2;$$

dit is in strijd met de inductie-aanname.

Ergo: $\forall p \in Z_\delta : |X_p^{(\delta)} \cap \bigcup_{i < \delta} t_i| \leq 1$.

b. In het bijzonder is dus

$$\forall p \in Z_{\omega_d} : |X_p^{(\omega_d)} \cap \bigcup_{i < \omega_d} t_i| \leq 1 \quad \dots(2)$$

Daar echter $\bigcup_{i < \omega_d} t_i$ dicht ligt in X , volgt uit (2) onmiddellijk

dat $|X_p^{(\omega_d)}| \leq 3$; als echter $|X_p^{(\omega_d)}| = 3$, is blijkbaar $X_p^{(\omega_d)} = \{s, s, s'\}$

voor zekere $s \in S$; maar dat betekent dat $\{s, s'\} = t_i$ voor zekere $i < \omega_d$, zodat $|X_p^{(\omega_d)} \cap \bigcup_{i < \omega_d} t_i| \geq 2$, in strijd met (2).

Derhalve is $|X_p^{(\omega_d)}| \leq 2$.

Dus $\theta \leq \omega_d + 1$.

4. We bewijzen nu, dat $\theta \leq \omega_d$ als $|P| = |Q| < |X|$.

Zij $N \subset X$, $\overline{N} = X$, $|N| = d$.

Zij $R = N \cup Q$; daar $|Q| < |X|$, dus $|Q| \leq d$, is ook $|R| = d$.

Zij $\{r_i\}_{i < \omega_d}$ een welordening van R .

Op een manier, die analoog is aan die in 3. toont men de existentie aan van een $\mathcal{V}$ -rij $V = \{V_\gamma\}_{\gamma \in Z_\gamma} \longrightarrow V_\gamma = \{X_p^{(\gamma)}\}_{p \in Z_\gamma}$ voor X , zodanig dat voor alle $\gamma \leq \omega_d$:

$$\forall p \in Z_\gamma : |X_p^{(\gamma)} \cap \bigcup_{i < \gamma} t_i| \leq 1;$$

hierin is $t_i = \{r_i\}$ als $r_i \in N$ en $t_i = r_i$ als $r_i \notin Q$.

In het bijzonder is dus

$$\forall p \in Z_{\omega_d} : |X_p^{(\omega_d)} \cap \bigcup_{i < \omega_d} t_i| \leq 1 \quad \dots(3)$$

Daar $\bigcup_{i < \omega_d} t_i$ dicht is in X , volgt uit (3), dat $|X_p^{(\omega_d)}| \leq 3$; als

echter $|X_p^{(\omega_d)}| = 2$ resp 3 , is blijkbaar $X_p^{(\omega_d)} = \{a, b\}$ resp

$X_p^{(\omega_d)} = \{a, b, c\}$, voor zeker paar burens $\{a, b\}$ (en evt. $\{b, c\}$); maar dat betekent dat $\{a, b\} = t_i$ voor zekere $i < \omega_d$, zodat

$$|X_p^{(\omega_d)} \cap \bigcup_{i < \omega_d} t_i| \geq 2, \text{ in strijd met (3).}$$

$$\text{Derhalve is } |X_p^{(\omega_d)}| = 1.$$

$$\text{Dus } \theta \leq \omega_d.$$

5. We bewijzen voorts, dat $\theta \leq \omega_{|X|}$.

Zij $\{x_i\}_{i < \omega_{|X|}}$ een welordering van X .

Op een manier, die analoog is aan die in 3. toont men de existentie aan van een $\mathcal{V}$ -rij $V = \{V_\gamma\}_{\gamma \in Z_\gamma} \text{ --- } V_\gamma = \{X_p^{(\gamma)}\}_p \text{ --- } Z_\gamma \text{ ---}$ voor X , zodanig dat voor alle $\gamma \leq \omega_{|X|}$:

$$\forall p \in Z_\gamma : |X_p^{(\gamma)} \cap \bigcup_{i < \gamma} \{x_i\}| \leq 1.$$

In het bijzonder is dus

$$\forall p \in Z_{\omega_{|X|}} : |X_p^{(\omega_{|X|})} \cap \bigcup_{i < \omega_{|X|}} \{x_i\}| \leq 1.$$

Daar echter $\bigcup_{i < \omega_{|X|}} \{x_i\} = X$, betekent dit

$$\forall p \in Z_{\omega_{|X|}} : |X_p^{(\omega_{|X|})}| = 1.$$

$$\text{Dus: } \theta \leq \omega_{|X|}.$$

6. Tenslotte tonen we aan, dat $\theta \leq \omega_w$:

$$\text{Als } |P| = |X|, \text{ is } w = |X|; \text{ dus } \theta \leq \omega_{|X|} = \omega_w;$$

$$\text{als } |P| < |X|, \text{ is } w = d; \text{ dus } \theta \leq \omega_d = \omega_w.$$

*Gevolg: (vergelijk * lemma 2.3): Indien X een nuldimensionale of een samenhangende ctgtr is, met gewicht w , dichtheid d en verdelingsgraad θ , dan geldt:

$$\text{a. } \theta \geq \omega_{\aleph} + 2 \text{ impliceert } d > \aleph$$

$$\text{b. } \theta \geq \omega_{\aleph} + 1 \text{ impliceert } w > \aleph;$$

$$\text{immers: als } d \leq \aleph \text{ volgt } \theta \leq \omega_d + 1 \leq \omega_{\aleph} + 1$$

$$\text{en als } w \leq \aleph \text{ volgt } \theta \leq \omega_w \leq \omega_{\aleph}$$

Voorbeeld: $d(Z_\alpha) = |\alpha|$, indien $\alpha = \omega_{|\alpha|}$ of $\alpha = \omega_{|\alpha|} + 1$
 $> |\alpha|$, indien $\alpha \geq \omega_{|\alpha|} + 2$;
 $w(Z_\alpha) = |\alpha|$, indien $\alpha = \omega_{|\alpha|}$
 $> |\alpha|$, indien $\alpha \geq \omega_{|\alpha|} + 1$.

Opmerking: lemma 3.2. geldt niet voor een willekeurige ctgtr;
 voorbeeld: Zij $X = W(\Omega) \cup [0, 1]$ (geordende vereniging);
 dan is $\theta(X) = \Omega + \omega$,
 en dus $\theta(X) > \omega_{|X|}$ ($= \Omega$)
 $> \omega_d + 1$ ($= \Omega + 1$)